

Infinity, Paradoxes, Gödel Incompleteness & the Mathematical Multiverse | Lex Fridman Podcast #488

Lex Fridman · 2025-12-31 · <https://www.youtube.com/watch?v=14OPT6CcsH4>



Выпуск представляет собой глубокое погружение в основания математики, теорию множеств и философию математической реальности. Гость подкаста — Джоэл Дэвид Хэмкинс, математик, логик, философ и обладатель самого высокого рейтинга за всю историю платформы MathOverflow.

Главная мысль беседы заключается в том, что математика не сводится к единой абсолютной истине или механическому вычислению. Открытие разных размеров бесконечности, парадоксы теории множеств и теоремы Гёделя о неполноте разрушили надежду на создание универсальной непротиворечивой системы. Вместо этого математическая реальность представляет собой «мультивселенную» — бесконечное множество альтернативных математических миров, в каждом из которых действуют свои законы и истины, а процесс доказательства является способом путешествия между ними.

[00:00-03:16] Вступление, благодарности слушателям, представление гостя и краткий обзор тем выпуска.

Эволюция понятия бесконечности

От потенциальной бесконечности к парадоксу Галилея 03:47: На протяжении тысячелетий, начиная с Аристотеля, математики признавали только потенциальную бесконечность (процесс, который никогда не заканчивается), считая актуальную бесконечность бессмысленной. Галилей стал исключением,

сформулировав парадокс: квадратов целых чисел (0, 1, 4, 9...) ровно столько же, сколько самих целых чисел (0, 1, 2, 3...), поскольку между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Это создавало конфликт между принципом Кантора-Юма (множества равны, если между их элементами есть соответствие один к одному) и принципом Евклида (целое всегда больше своей части).

Отель Гильберта и парадоксы счётной бесконечности 09:31: Свойства счётной бесконечности нарушают принцип Евклида. Если в полностью занятый отель с бесконечным числом номеров приезжает новый гость, его можно заселить, попросив каждого постояльца переселиться из номера N в номер $N+1$. Если приезжает бесконечный автобус новых гостей, текущих постояльцев переселяют в чётные номера ($N \times 2$), освобождая все нечётные.

Упаковка бесконечности в бесконечность 15:26: Если прибывает бесконечный поезд с бесконечным числом вагонов, в каждом из которых бесконечное число пассажиров, их всё равно можно заселить в отель. Каждому пассажиру присваивается номер по формуле $3^C \times 5^S$, где C — номер вагона, а S — номер места. Поскольку 3 и 5 — простые числа, результат всегда будет уникальным нечётным числом. Это доказывает, что объединение счётного множества счётных множеств остаётся счётным множеством.

Счётность рациональных чисел 21:50: Рациональные числа (дроби) кажутся более плотными, чем целые, так как между любыми двумя дробями всегда есть третья. Однако множество рациональных чисел счётно. Любую дробь можно представить как пару целых чисел (числитель и знаменатель), что математически эквивалентно бесконечному поезду с бесконечными вагонами.

Несчётные бесконечности и диагональный аргумент

Трансцендентные числа и доказательство интересности 23:57:

Вещественные числа включают в себя алгебраические (например, корень из 2) и трансцендентные (числа, не являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами, такие как π и e). Большинство вещественных чисел — трансцендентные. При этом любое натуральное число является интересным. Доказательство от противного: если существуют скучные числа, то среди них должно быть наименьшее скучное число. Но быть «наименьшим скучным числом» — это крайне интересное свойство, что создаёт противоречие.

Диагональный аргумент Кантора 28:06: Множество вещественных чисел строго больше множества натуральных. Если предположить обратное, все вещественные числа можно выстроить в пронумерованный список. Однако всегда можно сконструировать новое число Z , которого нет в списке: для этого нужно взять первую цифру после запятой у первого числа и изменить её, вторую цифру у второго числа и изменить её, и так далее по диагонали. Полученное

число Z будет отличаться от любого N -го числа в списке как минимум N -й цифрой. Чтобы избежать проблемы двойного представления чисел ($0.999... = 1.000...$), при конструировании Z просто не используются цифры 0 и 9.

Теория множеств и её парадоксы

Аксиома выбора и носки Рассела 34:47: Теория множеств стала фундаментом математики, позволив рассматривать совокупность объектов как единый абстрактный объект. В 1904 году Цермело доказал теорему о вполнепорядочении, опираясь на Аксиому выбора. Бертран Рассел объяснял её так: если у вас есть бесконечное число пар обуви, вы можете выбрать по одному ботинку из каждой пары, задав правило (например, «всегда брать левый»). Но если у вас бесконечное число пар абсолютно одинаковых носков, правила нет. Аксиома выбора постулирует, что функция выбора существует, даже если мы не можем её явно описать.

Аксиоматика ZFC 44:25: Система Цермело-Френкеля с Аксиомой выбора (ZFC) стала стандартом. Она включает базовые утверждения: аксиому экстенциональности (множества равны, если состоят из одних и тех же элементов), существование пустого множества, аксиому бесконечности и аксиому булеана (множества всех подмножеств). Исторически математики яростно критиковали Аксиому выбора, но позже выяснилось, что многие из них неявно использовали её в собственных доказательствах.

Теорема Кантора о булеане и антропоморфные доказательства 49:49:

Множество всех подмножеств всегда строго больше исходного множества. Это можно объяснить через «комитеты»: из любого числа людей можно составить больше комитетов, чем самих людей. Если каждому человеку назначить свой комитет, можно создать «Комитет D», состоящий из всех людей, которые не состоят в своём собственном комитете. Если этот комитет назначен Даниэлле, возникает парадокс: состоит ли она в нём? Если да, то не должна; если нет, то должна. Тот же принцип работает с фруктовыми салатами.

Парадокс Рассела и крах логицизма 56:53: Готлоб Фреге посвятил жизнь попытке свести всю математику к чистой логике. Его система опиралась на принцип: для любого свойства можно создать множество объектов, обладающих этим свойством. Рассел разрушил эту работу одним письмом, предложив рассмотреть «множество всех множеств, которые не содержат сами себя». Это вызвало неразрешимое противоречие. Крах проекта Фреге стал травмой, но в итоге цели логицизма были достигнуты через утверждение теории множеств в качестве фундамента математики.

Неполнота Гёделя и проблема остановки

Программа Гильберта и формализм 1:02:47: В начале XX века Давид Гильберт предложил программу спасения математики от парадоксов. Идея заключалась в формализации математики: отделении смысла символов от правил их перемещения. Целью было создать мощную теорию, способную ответить на любой вопрос, и с помощью слабой, финитной арифметики доказать, что эта мощная теория никогда не приведёт к противоречию. Если бы Гильберт был прав, математика свелась бы к механическому перебору теорем машиной.

Теоремы Гёделя о неполноте 1:16:07: Гёдель полностью разрушил программу Гильберта. Первая теорема гласит: любая вычислимо аксиоматизируемая теория, включающая базовую арифметику, неполна — в ней всегда будут истинные утверждения, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Вторая теорема: ни одна такая теория не может доказать собственную непротиворечивость. Доверять теории, которая доказывает свою непротиворечивость, так же бессмысленно, как верить продавцу подержанных авто, который сам называет себя честным.

Фактчек: Первая теорема Гёделя: любая вычислимо аксиоматизируемая теория с арифметикой неполна — Δ : Claude и GPT независимо заметили потерянное условие непротиворечивости: противоречивая теория доказывает всё и «полна» тривиально. Вывод неполноты из проблемы остановки — стандартный и корректный.

Истина против Доказательства 1:20:19: До Гёделя и Тарского математики часто путали истинность и доказуемость. Истина — это семантическое свойство объективной реальности (по Тарскому, фраза «Снег белый» истинна тогда и только тогда, когда снег белый). Доказательство — это синтаксический процесс, последовательность утверждений по правилам логики. Доказательство — это лишь наш способ познания истины, и теоремы Гёделя показывают, что эти два понятия не совпадают.

Проблема остановки (Halting Problem) 1:31:38: Не существует вычислимого алгоритма, способного определить, завершит ли работу любая заданная программа. Доказательство: представим программу Q, которая анализирует программу P. Если P останавливается, Q уходит в бесконечный цикл. Если P зависает, Q останавливается. Если натравить Q саму на себя, возникнет парадокс: Q остановится тогда и только тогда, когда она не останавливается. Через проблему остановки можно элементарно доказать теорему Гёделя: если бы существовала полная теория арифметики, мы могли бы решить проблему остановки, просто генерируя теоремы, пока не выпадет ответ «остановится» или «не остановится».

Философия математики и природа реальности

Искусство доказательства и деньги 1:39:05: Антропоморфизация математических объектов упрощает понимание. Например, задача: можно ли в группе людей указывать пальцами так, чтобы на каждого указывало больше людей, чем указывает он сам? Доказательство: пусть каждый даст по 1 доллару тем, на кого указывает. Если условие выполнено, каждый человек получит больше денег, чем отдаст. Но замкнутая группа не может разбогатеть просто передавая деньги друг другу. Следовательно, это невозможно. Однако в бесконечной группе это правило ломается: можно передавать доллары по цепочке (как в Отеле Гильберта), и в итоге у каждого окажется бесконечное количество денег.

Платонизм и математическая реальность 1:47:27: Абстрактные математические объекты существуют реально. Попытки свести математическое существование к физическому бессмысленны, так как мы совершенно не понимаем природу физической реальности (от бильярдных шаров Ньютона до квантовых волновых функций физика становится всё более загадочной). В то же время природа абстрактных объектов (например, пустого множества) абсолютно ясна и прозрачна.

Структурализм и проблема Юлия Цезаря 1:53:18: В математике важна не суть объекта, а его роль в структуре. Любую математическую структуру можно заменить изоморфной копией. Фреге задавался вопросом: является ли Юлий Цезарь числом? Для структуралиста этот вопрос лишен смысла. Если взять систему чисел и заменить число 17 на Юлия Цезаря, математические свойства системы не изменятся. Сущность объектов не имеет значения.

Континуум-гипотеза и Мультивселенная

Континуум-гипотеза (CH) 2:09:11: Вопрос Кантора: существует ли бесконечность, промежуточная по размеру между натуральными и вещественными числами? Кантор доказал, что для открытых и замкнутых множеств такой бесконечности нет (в процессе доказательства ему пришлось изобрести порядковые числа — ординалы). CH стала проблемой №1 в знаменитом списке Гильберта 1900 года.

Независимость CH и метод форсинга 2:16:33: В 1938 году Гёдель доказал, что CH нельзя опровергнуть в рамках ZFC, построив «конструктивную вселенную», где CH истинна. В 1963 году Пол Коэн изобрёл метод форсинга и доказал, что CH нельзя и доказать: он показал, как из любой модели теории множеств создать новую вселенную, где CH ложна. Большинство нетривиальных вопросов о бесконечностях оказались независимыми от ZFC.

Фактчек: Независимость континуум-гипотезы от ZFC (Гёдель 1938, Коэн 1963) —

□: Корректно при стандартной оговорке «если ZFC непротиворечива». При этом

«математическая мультивселенная» как замена единой реальности — философская позиция Хэмкинса, а не доказанное следствие независимости ($\square$ в этой части).

Математическая мультивселенная 2:28:15: Независимость CH означает не слабость теории, а то, что математики нащупали разлом в самой реальности. Не существует единой «истинной» теории множеств. Существует мультивселенная альтернативных математических миров. Континуум-гипотеза работает как переключатель: из любого мира можно с помощью форсинга перейти в мир, где она истинна, или в мир, где она ложна.

Теоретико-множественная геология 2:41:26: Метод форсинга можно обратить вспять. Можно взять текущую математическую вселенную и вычислить, из какой базовой модели («фундамента») она могла быть получена путём форсинга. Часто математики уходят в «землю абсурда» (форсинговое расширение), доказывают там теорему, а затем возвращают следствия обратно в базовую модель.

Сюрреальные числа и вычислимость

Сюрреальные числа Конвея 2:47:11: Это колоссальная система, объединяющая целые, рациональные, вещественные числа, ординалы и бесконечно малые величины. Они генерируются из ничего по одному правилу: на каждом этапе существующие числа делятся на Левое и Правое множества (где всё слева меньше всего справа), и в образовавшемся зазоре рождается новое число.

Фактчек: Сюрреальные числа разрывны, нет пределов и сходящихся последовательностей; годятся для нестандартного анализа — $\triangle$: Расхождение. Gemini подтверждает ($\aleph_1$ -насыщенность, нет нетривиальных сходящихся последовательностей). Claude уточняет: пределы формально определены, но ω -последовательности не сходятся из-за «дыр»; интегрирование строится плохо; стандартный инструмент нестандартного анализа — гиперреальные числа с принципом переноса, которого у сюрреальных как класса нет. Корни нечётных многочленов есть — верно.

Большой взрыв чисел 2:48:51: В начале нет ничего. Пустое множество делится на два пустых множества, и в зазоре рождается 0. На следующем этапе 0 порождает 1 и -1. На бесконечном дне «омега» рождаются все вещественные числа, сам ординал омега и бесконечно малые числа (эпсилон). Сюрреальные числа позволяют делать нестандартный анализ и извлекать корни из полиномов, но они фундаментально разрывны (нет пределов и сходящихся последовательностей).

Статистическое решение проблемы остановки 2:00:16: Хотя проблема остановки неразрешима в общем виде, её можно вычислимо решить для *почти всех* программ (асимптотическая плотность стремится к 100%). 13.5% машин

Тьюринга вообще не имеют инструкции «остановка». Для остальных работает закон случайного блуждания (теорема Пойи): с вероятностью 1 считывающая головка машины Тьюринга просто упадёт с края ленты до того, как состояние повторится. Это позволяет алгоритмически предсказать крах почти любой случайной программы.

Фактчек: Проблема остановки разрешима для почти всех программ; 13,5% машин не имеют инструкции «стоп» — Δ : Результат Хэмкинса-Мясникова реален ($13,5\% = e^{-2}$ в пределе), но жёстко привязан к конкретной модели (случайная таблица переходов, лента с краем) и ничего не говорит о программах, которые пишут люди. Gemini поставил $\square$, Claude и GPT настаивают на оговорке — она существенна: формулировка «крах почти любой случайной программы» верна только внутри этого формализма.

Р против NP 3:08:46: Вопрос о равенстве классов P и NP носит асимптотический характер и далёк от практики. Даже если $P=NP$, коэффициенты полинома могут быть настолько огромными, что алгоритм останется бесполезным. На практике для большинства NP-полных задач (например, задача о рюкзаке или SAT-солверы) уже существуют аппроксимации, которые за полиномиальное время решают почти все реальные инженерные случаи.

Фактчек: NP-полные задачи на практике решаются полиномиальными аппроксимациями (рюкзак, SAT) — Δ : SAT-солверы — точные алгоритмы, быстрые на структурированных инстансах, без полиномиальной гарантии, а не аппроксимации. Для рюкзака FPTAS существует, но многие NP-полные задачи не аппроксимируются вовсе (при $P \neq NP$). Тезис «асимптотика $\neq$ практика» верен, обобщение — нет.

Бесконечные шахматы, ИИ и красота математики

Бесконечные шахматы 3:26:58: Играются на бесконечной во все стороны доске. Фигуры ходят стандартно, но нет правила троекратного повторения (бесконечная игра — это ничья) и нет превращения пешек. Главный интерес представляют специально сконструированные позиции.

Мат в омега ходов 3:28:39: Существуют позиции, где белые гарантированно ставят мат за конечное число ходов, но не существует конкретного числа N , за которое они могут это сделать. Чёрные проигрывают, но именно они своим первым ходом выбирают, сколько тысяч или миллионов ходов продлится игра (отсчёт вниз от ординала омега). Доказано, что любой счётный ординал (например, омега в четвёртой степени) может быть значением игры в бесконечных шахматах.

Фактчек: Любой счётный ординал может быть значением игры в бесконечных шахматах — Δ : Только Claude заметил преувеличение: для обычных 2D-шахмат с конечным числом фигур доказаны значения до ω^4 (Эванс-Хэмкинс 2014), для всех

счётных ординалов — лишь в трёхмерном варианте. Существование позиций «мат в ω ходов» подтверждено всеми.

Скептицизм к ИИ (LLM) в математике 3:35:37: Текущие языковые модели бесполезны для строгих математических доказательств. Их архитектура нацелена на генерацию текста, который *выглядит* как доказательство, а не является им. Это создаёт опасную иллюзию: красиво свёрстанный в LaTeX текст усыпляет бдительность, заставляя человека пропускать фундаментальные логические ошибки. ИИ имитирует форму, не обладая математическим пониманием.

Фактчек: LLM бесполезны для строгих математических доказательств — $\square$:
Оценки разошлись (Gemini $\square$, Claude $\square \rightarrow \triangle$, GPT $\square$), но фактура одна: золото IMO-2025 у систем Google/OpenAI, вклады в задачи Эрдёша, связка LLM+Lean, где «текст, похожий на доказательство», не проходит проверку по определению. Как категоричное утверждение — ложно; валидна психологическая часть: полированный LaTeX усыпляет проверяющего.

Самые красивые идеи 3:45:24: В математике самая красивая идея — это трансфинитные ординалы Кантора (возможность продолжать счёт за пределами бесконечности: ω , $\omega+1$, ω в квадрате и т.д.). В философии самая глубокая идея — это различие между Истиной (объективной реальностью) и Доказательством (нашим способом взаимодействия с этой реальностью и её познания).

ОБЩИЕ ПРОВЕРКИ

Хэмкинс — №1 по репутации за всю историю MathOverflow — $\square$:
Подтверждено двумя рецензентами, свыше 250 000 очков, стабильное первое место с большим отрывом.

ЛИЧНО ДЛЯ ТЕБЯ

Истина $\neq$ доказательство — правило для режима «AI пишет, я читаю»:
Уверенный тон и чистый синтаксис отключают критику. Не оценивать «похоже ли на правильное», а требовать исполняемые артефакты: тесты, контрпримеры, явные инварианты, независимый прогон. Одобрение второй LLM — не независимая проверка.

Приём «доллары и указывающие пальцы» для аргументации: Перевод абстрактного тезиса в конкретный инвариант («замкнутая группа не может разбогатеть, передавая деньги») — универсальный способ проверять чужие аргументы и объяснять свои. Если утверждение нельзя пересказать через такую модель — оно, скорее всего, плохо понято.

Фильтр для громких рассуждений об ограничениях AI: «Недоказуемо в ZFC» $\neq$ «непознаваемо вообще»; теоремы Гёделя не доказывают превосходство

человека над машиной. Аналогично с P vs NP и проблемой остановки: теоретическая неразрешимость в общем виде часто не мешает решать 99,9% реальных случаев — достаточно статистически надёжного решения, а не идеального.

Интеллектуальное удовольствие: «Surreal Numbers» Кнута (тонкая новелла, читается за вечер), «Lectures on the Philosophy of Mathematics» Хэмкинса, его блог с позициями бесконечных шахмат. Концепт «мат в ω ходов» — проигрыш неизбежен, но проигравший сам выбирает, сколько усилий потратит победитель — хорошая модель для ситуаций с предопределённым исходом.

КОНСЕНСУС РЕЦЕНЗЕНТОВ

Все сошлись: рейтинг Хэмкинса верен, независимость CH корректна, а главная практическая ценность выпуска — предупреждение о том, что форма убедительности (LaTeX, чистый код) маскирует логические дыры. Разошлись в строгости: Gemini ставил $\square$ там, где Claude и GPT видели модельно-зависимые оговорки (проблема остановки, surreальные числа); тезис о бесполезности LLM оценён от $\square$ до $\square$; только Claude поймал преувеличение про «любой счётный ординал» в шахматах и пропущенное условие непротиворечивости заметили лишь Claude и GPT.